Unidad IV: Fundamentos de Sucesiones y series

Sucesiones

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de números enteros positivos y el conjunto de llegada es el conjunto de los números reales. Es decir,

$$f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}$$
$$n \to f(n) = a_n$$

Una sucesión, generalmente, se representa con cualquiera de las siguientes notaciones: $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ó $\{a_n\}_{n\geq 1}$

$\{a_n\} = \{a_1, a_2, a_{3,} ...\}$

a_n : se llama término general

a_1 , a_2 , a_3 , ... cada uno de ellos se les llama términos

Siendo: a_1 el primer término , a_2 el segundo término, etc.

Ejemplos: Determinación de términos de una sucesión

Escriba los primeros tres términos de cada una de las sucesiones siguientes

a) $\left\{\dfrac{n}{n+3}\right\}$

Solución

Sustituimos los valores de $n = 1, 2, 3$ en el término general.

$n = 1, \quad a_1 = \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{1}{4}$

$n = 2, \quad a_2 = \dfrac{2}{2+3} = \dfrac{2}{5}$

$n = 3, \quad a_3 = \dfrac{3}{3+3} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\vdots$

$\left\{\dfrac{n}{n+3}\right\} = \left\{\dfrac{1}{4}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{2}, ...\right\}$

b) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right\}$

Solución

Sustituimos los valores de $n=1,2,3$ en el término general.

$$n=1,\quad a_1=\frac{(-1)^1}{2^1}=-\frac{1}{2}$$

$$n=2,\quad a_2=\frac{(-1)^2}{2^2}=\frac{1}{4}$$

$$n=3,\quad a_3=\frac{(-1)^3}{2^3}=\frac{-1}{8}=-\frac{1}{8}$$

$\vdots$

$$\left\{\frac{(-1)^n}{2^n}\right\}=\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},\dots\right\}$$

Ejemplo: Determinación del término general de una sucesión

a) Determinar el término general de $\{4, 8, 16, 32, \dots\}$

Solución

Observar la secuencia de los términos y relacionarlos con el valor de n correspondiente.

$$a_1=4=2^2=2^{1+1}$$

$$a_2=8=2^3=2^{2+1}$$

$$a_3=16=2^4=2^{3+1}$$

$$a_4=32=2^5=2^{4+1}$$

$$a_n=\qquad 2^{n+1}$$

$$R/\ \left\{2^{n+1}\right\}$$

b) Determinar el término general de $\left\{\frac{1}{1\cdot 4}, \frac{1}{2\cdot 8}, \frac{1}{3\cdot 16}, \frac{1}{4\cdot 32}, \dots\right\}$

Solución

$$\left\{\frac{1}{1\cdot 4}, \frac{1}{2\cdot 8}, \frac{1}{3\cdot 16}, \frac{1}{4\cdot 32}, \dots\right\}$$

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{1}{1\cdot 2^2}=\frac{1}{1\cdot 2^{1+1}}$$

$$a_2=\frac{1}{2\cdot 8}=\frac{1}{2\cdot 2^3}=\frac{1}{2\cdot 2^{2+1}}$$

$$a_3=\frac{1}{3\cdot 16}=\frac{1}{3\cdot 2^4}=\frac{1}{3\cdot 2^{3+1}}$$

$$a_4 = \frac{1}{4\cdot 32} = \frac{1}{4\cdot 2^5} = \frac{1}{4\cdot 2^{4+1}}$$

$$a_n = \frac{1}{n2^{n+1}}$$

$$R/ \quad \left\{\frac{1}{n2^{n+1}}\right\}$$

Ejercicio: Determine el término general de las sucesiones

a) $\{3\ , 9,\ 27, 81, 243, \ldots\}$ b) $\left\{\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}, \ldots\right\}$ c) $\{2\ , 16,\ 54, 128, 250, \ldots\}$

Sucesiones aritméticas

Es aquella sucesión, en la que la diferencia de un término con su antecesor, es una constante

Ejemplo: Determinar si la sucesión $\{5\ , 8, 11, 14, \ldots\}$ es aritmética

Solución

$\{5\ , 8, 11, 14, \ldots\}$

$a_1 = 5\ , a_2 = 8\ ,\ a_3 = 11\ , a_4 = 14, \ldots$

$d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3$

$d = a_3 - a_2 = 11 - 8 = 3$

$d = a_4 - a_3 = 14 - 11 = 3$

Podemos concluir que la sucesión es aritmética

Donde

d : es la diferencia entre un término y *su* antecesor

El término general de una sucesión aritmética tiene la forma $a_n = dn + b$

Para determinar el término general necesitamos tener dos términos de la sucesión y resolver el sistema de ecuaciones

Ejemplo: Determinar el término general de la sucesión $\{4\ , 9, 14, 19, \ldots\}$

Solución

$\{4\ , 9, 14, 19, \ldots\}$

$a_1 = 4 \quad a_2 = 9 \quad a_3 = 14 \quad a_4 = 19$

Primero verificar que es una sucesión aritmética

$a_2 - a_1 = 9 - 4 = 5$

$a_3 - a_2 = 14 - 9 = 5$

$a_4 - a_3 = 19 - 14 = 5$

En efecto es una sucesión aritmética

Segundo determine el término general

Una forma para determinar el término general es utilizar cualquier pareja de términos y luego resolver el sistema de ecuaciones.

En este caso utilizaremos a_1 *y* a_3

Recordando que la forma general es $a_n = dn + b$

$a_1 = d(1) + b = 4 \quad \rightarrow d + b = 4 \quad ec(1)$

$a_3 = d(3) + b = 14 \quad \rightarrow 3d + b = 14 \quad ec(2)$

$ec(2) - ec(1) \rightarrow 3d + b = 14$

$-d - b = -4$

$2d = 10 \rightarrow d = \frac{10}{2} = 5$

Sustituyendo $d = 5$ en $ec(1)$ encontraremos el valor de b

$d + b = 4 \rightarrow 5 + b = 4 \rightarrow b = 4 - 5 \rightarrow \boxed{b = -1}$

Sustituyendo d *y* b *en el término general* $a_n = dn + b$ *se obtiene*

$\boxed{a_n = 5n - 1}$

Ejercicio: Determinar el termino general de cada sucesión

a) $\{1, 4, 7, 10, 13, ...\}$ b) $\left\{\frac{11}{2}, 6, \frac{13}{2}, 7, ...\right\}$ c) $\{4, 1, -2, -5, ...\}$

d) determine el término general de la sucesión aritmética cuyo segundo termino es 2 y décimo término es 36

Sucesiones geométricas

Son aquellas en las cuales, el cocientre entre un término y el anterior, es una constante llamada **razón** (r)

Ejemplo: Verificar que la sucesión $\left\{\frac{6}{5}, \frac{12}{25}, \frac{24}{125}, \frac{48}{625}, ...\right\}$ es geométrica.

Solución

$$\left\{\frac{6}{5}, \frac{12}{25}, \frac{24}{125}, \frac{48}{625}, ...\right\}$$

$$a_1 = \frac{6}{5}, \quad a_2 = \frac{12}{25}, \quad a_3 = \frac{24}{125}, \quad a_4 = \frac{48}{625}$$

Simplificamos los cocientes entre el término y su anterior

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{12}{25}}{\frac{6}{5}}=\frac{12(5)}{25(6)}=\frac{2}{5} \qquad \frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{24}{125}}{\frac{12}{25}}=\frac{24(25)}{125(12)}=\frac{2}{5} \qquad \frac{a_4}{a_3}=\frac{\frac{48}{625}}{\frac{24}{125}}=\frac{48(125)}{625(24)}=\frac{2}{5}$$

$Luego\ \ r=\frac{2}{5}$

$\therefore La\ sucesión\ es\ geométrica$

El término general de una sucesión geométrica tiene la forma $a_n=kr^n$

Ejemplo: Determinar el término general de la sucesión $\left\{\frac{5}{6},\frac{25}{18},\frac{125}{54},\frac{625}{162},\dots\right\}$

<u>Solución</u>

$a_1=\frac{5}{6}\ ,\ a_2=\frac{25}{18}\quad ,\quad a_3=\frac{125}{54}\quad ,\quad a_4=\frac{625}{162}$

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{\frac{25}{18}}{\frac{5}{6}}=\frac{25(6)}{18(5)}=\frac{5}{3} \qquad \frac{a_3}{a_2}=\frac{\frac{125}{54}}{\frac{25}{18}}=\frac{125(18)}{54(25)}=\frac{5}{3} \qquad \frac{a_4}{a_5}=\frac{\frac{625}{162}}{\frac{125}{54}}=\frac{625(54)}{162(125)}=\frac{5}{3}$$

$Luego\quad r=\frac{5}{3}$

$\therefore La\ sucesión\ es\ geométrica$

Si, se conoce la razón, sustituimos el valor de la razón r en el término general y tomamos uno de los términos, para luego despejar el valor de k .

$$a_n=kr^n$$

$$a_n=k\left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$a_1=\frac{5}{6}\ ,\ a_2=\frac{25}{18}\quad ,\quad a_3=\frac{125}{54}\quad ,\quad a_4=\frac{625}{162}$$

Si tomamos el primer término: $a_1=\frac{5}{6},\ en\ este\ caso,\ n=1$

$$a_1=k\left(\frac{5}{3}\right)^1=\frac{5}{6}\rightarrow k\left(\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{6}\rightarrow k=\frac{5(3)}{6(5)}=\frac{1}{2}$$

Los valores de k y r encontrados los sustituimos en el término general $a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n$

Ejercicio: determine el término general de las sucesiones siguientes.

a) $\{10\ ,20,\ 40,80,\dots\}$ b) $\left\{\frac{10}{3},\frac{50}{3},\frac{250}{3},\frac{1250}{3},\dots\right\}$ c) $\left\{1\ ,\frac{3}{2},\frac{9}{4},\frac{27}{8},\dots\right\}$

d)Determine el término general de la sucesión geométrica cuyo tercer término es $\frac{54}{125}$ y quinto término es $\frac{486}{3125}$.

Sucesión convergente y divergente

Una sucesión es convergente si $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$ y se dice que converge a L .Una sucesión es divergente si $\lim_{n\to+\infty} a_n$ no existe. O también se dice que la sucesión no converge.

TEOREMA

Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *sucesiones convergentes. Si* $\lim_{n\to+\infty} a_n = L_1$ *y* $\lim_{n\to+\infty} b_n = L_2$, *entonces*

$i)\ \lim_{n\to+\infty} c = c,\ c \text{ un número real}$

$ii)\ \lim_{n\to+\infty} ka_n = k \lim_{n\to+\infty} a_n = kL_1,\ k \text{ un número real}$

$iii)\ \lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n = L_1 + L_2$

$iv)\ \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot \lim_{n\to+\infty} b_n = L_1 \cdot L_2$

$$v)\ \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} a_n}{\lim_{n\to+\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2},\quad L_2 \neq 0$$

Ejemplo: Determine cuales de las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes.

$$a)\ \left\{\frac{1}{2n+1}\right\} \qquad b)\ \left\{\frac{3n+2}{2-4n}\right\} \qquad c)\{\cos(n\pi)\} \qquad d)\ \left\{\frac{e^n}{\ln(n+1)}\right\}$$

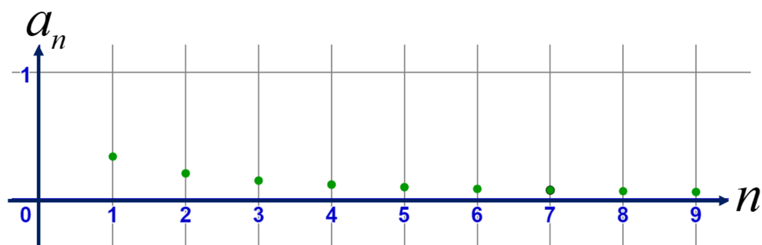
Solución

$a)\ \left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$$

La sucesión $\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$ *converge a cero*

Se puede combrobar gráficamente….



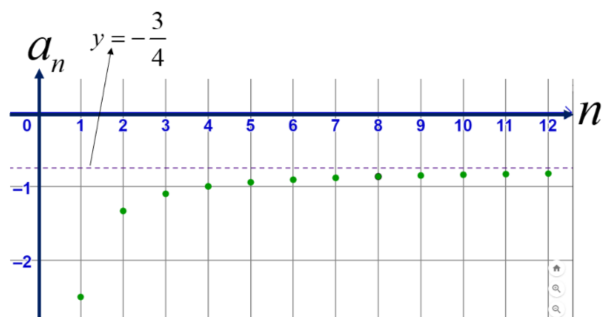
$b)\ \left\{\dfrac{3n+2}{2-4n}\right\}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{2-4n} = \frac{+\infty}{-\infty}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{-4} \quad Aplicando\ L\ Hôpital$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\frac{3}{4}$$

$\therefore$ *La sucesión es convergente y converge a* $-\dfrac{3}{4}$

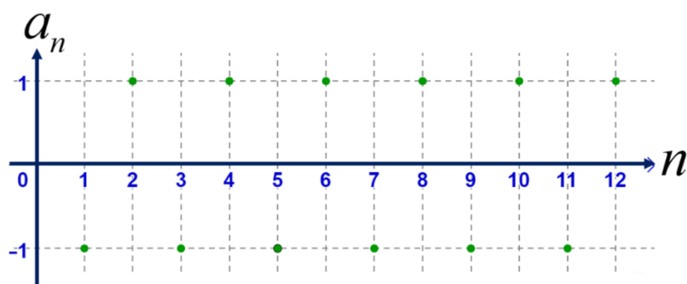


$c)\ \{\cos(n\pi)\}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & si\ n\ es\ par \\ -1 & si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

$\therefore$ *La sucesión no converge es decir*

es divergente



$d) \quad \left\{ \dfrac{e^n}{\ln(n+1)} \right\}$

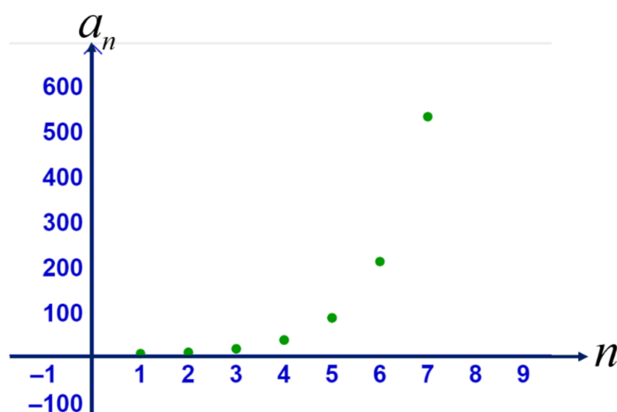
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{\ln(n+1)} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{\frac{1}{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (n+1)e^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

$\therefore$ *la serie diverge*



Teorema

Si r es una constante distinta de cero, entonces la sucesión $\{r^n\}$ converge a 0 si $|r|<1$ y diverge si $|r|>1$.

Observación

Este teorema nos indica que las sucesiones geométricas convergen a cero si $|r|<1$ y divergen si $|r|>1$.

Teorema

Si la sucesión $\{|a_n|\}$ converge a 0, entonces $\{a_n\}$ converge a cero.

Ejercicio: Determine cuales de las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes. En caso que converger, indicar a que valor converge.

a) $\left\{5\left(\frac{7}{9}\right)^n\right\}$ **b)** $\left\{5(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ c) $\left\{\frac{2^n}{3^n+5}\right\}$

d) $\left\{1+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\frac{1}{5}, \ldots\right\}$ e) $\left\{\frac{5^n}{n^{\frac{3}{2}}}\right\}$

Ejercicio:

Una pelota, que cae desde una gran altura, recorre 16 pies durante el primer segundo, 48 pies durante el segundo segundo, 80 pies durante el tercero, y así en lo sucesivo. ¿Cuál es la distancia recorrida por la pelota durante el sexto segundo?

Series

Si $\{a_n\}$ es una sucesión, entonces, a la suma de los términos de la sucesión se le llama serie infinita.

En este caso, la serie es $a_1+a_2+a_3+\ldots$

En forma simplificada se representa por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Es decir, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1+a_2+a_3+\ldots$

Donde : $a_1, a_2, a_3, \ldots$ son llamados términos de la serie

a_n : es el término general de la serie

Ejemplo:

$a)$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{2^n} = 1+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}+\ldots$ $b)$ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$

Sucesión de sumas parciales

Es aquella sucesión que se forma tomando una parte de la serie y se denota por $\{S_n\}$.

$\{S_n\} = \{S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots\}$

Donde:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

Otra forma de expresar

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = \sum_{n=1}^{2} a_n = a_1 + a_2$$
$$S_3 = \sum_{n=1}^{3} a_n = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_4 = \sum_{n=1}^{4} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$
$$S_n = \sum_{n=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$$

La sucesión de sumas parciales puede escribirse como:

$$\{S_n\} = \left\{ \sum_{n=1}^{n} a_n \right\}$$

Ejemplo:

Escriba los 4 primeros términos de la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n+1}$

Solución

$$S_1 = 1$$
$$S_2 = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$$
$$S_3 = 1 + \frac{3}{5} + \frac{3}{7} = \frac{71}{35}$$
$$S_4 = 1 + \frac{3}{5} + \frac{3}{7} + \frac{3}{9} = \frac{248}{105}$$

Ejercicio: Escriba los 4 primeros términos de la sucesión de sumas parciales de las series

$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ $\qquad$ $b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2n-3}$

Definición

Una serie infinita $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es convergente, si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ *es convergente*

Es decir, si $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{n=1}^{n} a_n = L$, *entonces la serie converge a* L

$$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = L$$

Si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ *no existe, entonces la serie no converge o también se dice que la serie es divergente.*

Ejemplo: Determine si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n = 1+2+3+4+....$ converge o diverge.

Solución

Primero determinamos la sucesión de sumas parciales.

S_n : *es la suma de los* n *primeros términos de la serie.*

$$S_n = 1+2+3+\cdots+n-2+n-1+n$$

(Las parejas 1 y n, 2 y $n-1$, 3 y $n-2$ suman cada una $n+1$.)

Tendríamos $\frac{n}{2}$ parejas cuyas sumas da $n+1$, por lo que $S_n = \frac{n}{2}(n+1)$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}(n+1) = +\infty$$

La sucesión de sumas parciales de la serie diverge

$$\therefore \text{ la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} n \text{ es divergente}$$

En el caso de las series cuyo término general es el de una sucesión aritmética, puede utilizarse un método similar al anterior para simplificar la sucesión de sumas parciales.

Ejemplo: Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+3) = 5+7+9+...$

Solución

$$S_n = 5+7+9+\cdots+\left(2(n-2)+3\right)+\left(2(n-1)+3\right)+\left(2n+3\right)$$

$$2n+8$$

S_n : es la suma de los n primeros términos de la serie. Tendríamos $\frac{n}{2}$ parejas cuyas sumas da $2n+8$, por lo que $S_n = \frac{n}{2}(2n+8) = n(n+4)$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} n(n+4) = +\infty$$

La sucesión de sumas parciales de la serie diverge

$\therefore$ *la serie* $\sum_{n=1}^{+\infty}(2n+3)$ *es divergente*

En conclusión: Toda serie, cuyo término general corresponde a una sucesión aritmética, es divergente.

Ejercicio

a) **Dada la serie** $\sum_{n=1}^{+\infty}(3n+5)$ determine S_n y simplifique.

b) **Dada la serie** $7+11+15+19+24+\ldots$ determine S_n y simplifique.

Serie geométrica

Una serie geométrica es aquella que tiene la forma $a+ar+ar^2+ar^3+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$. Estas series convergen o divergen dependiendo del valor de r

Simplificación de S_n para una serie geométrica.

$$S_n = a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}$$

$$rS_n = ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^n+ar^n$$

$$S_n = a+ar+ar^2+ar^3+\ldots+ar^{n-1}$$

$$-rS_n = -ar-ar^2-ar^3-\ldots-ar^{n-1}-ar^n$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a - ar^n$$

$$\boxed{S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}}$$

Notemos que :

$$\lim_{n\to+\infty} r^n = \begin{cases} 0 & si\ |r|<1 \\ \infty & si\ |r|>1 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a - ar^n}{1-r} = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & si\ |r|<1 \\ \infty & si\ |r|>1 \end{cases}$$

Podemos concluir que:

La serie geométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ es convergente cuando $-1<r<1$ y converge a $\dfrac{a}{1-r}$; mientras que la serie diverge si $r<-1 \vee r>1$.

Ejemplo: Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes. Si convergen, indicar a que valor convergen.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

Solución

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ es geométrica

Comparandola con la forma general $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ podemos observar que $a=3 \wedge r=\frac{2}{5}$ y como $-1<r<1$, por tanto la serie es convergente.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \frac{3}{1-\frac{2}{5}} = \frac{5(3)}{5\left(1-\frac{2}{5}\right)} = \frac{15}{5-2} = \frac{15}{3}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 5}$$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 7\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$

Solucion

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 7\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$ es geométrica, comparandola con la forma general $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1}$ podemos observar que $a=7 \wedge r=\frac{5}{4}$ y como $r=\frac{5}{4}>1$, Podemos concluir que la serie es divergente.

Observación:

Cuando se tiene una serie geométrica la letra n puede ser sustituida por cualquier otra letra:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} ar^{k-1} = \sum_{i=1}^{+\infty} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots$$

Ejemplo: Una serie en la que hay que darle la forma de serie geométrica.

Determinar la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n$

Solución

Puede observarse que la serie se parece a una serie geométrica, pero el exponente de r, no es $n-1$. Entonces, tenemos que darle la forma de una serie geométrica. $\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \ldots$

Para darle forma de una serie geómetrica tenemos que tener una serie de la forma siguiente

$$\sum_{i=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \ldots$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} = 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

Despejando

$$\sum_{i=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} - 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^n = \sum_{i=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} - 2 \quad ec(1)$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} \text{ la serie converge, porque } -1 < r = \frac{1}{5} < 1$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} = \frac{2}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5(2)}{5\left(1-\frac{1}{5}\right)} = \frac{10}{5-1} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$Sustituyendo\ en\ ec(1)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{n} = \sum_{i=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{i-1} - 2$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{n} = \frac{5}{2} - 2$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} 2\left(\frac{1}{5}\right)^{n} = \frac{1}{2}}$$

Ejercicio: Determine si las siguientes series son convergentes o divergentes. Si convergen, indicar a que valor convergen.

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} 4\left(\frac{7}{3}\right)^{n-1} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$$

TEOREMA

$$Si\ la\ serie\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\ \ converge\ ,\ entonces\ \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

<u>Observación</u>

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ no implica que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, en tal caso podría que converger o que no.

Es decir que, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ es una condición necesaria, pero no suficiente para decir que la serie converge.

TEOREMA

Si $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

Este teorema es bien importante para determinar si una serie diverge. Aunque no es util para determinar convergencia de una serie.

Ejemplo determine convergencia o divergencia de las series siguientes.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2-7n}$

Solución

$a_n = \dfrac{2n+1}{2-7n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{2-7n} = \dfrac{+\infty}{-\infty}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{-7}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\dfrac{2}{7} \neq 0$ $\quad \therefore$ *La serie diverge*

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

Solución

$a_n = \dfrac{1}{n^3}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0$ $\quad$ *En este caso no podemos afirmar que la serie converge o diverge*

Ejercicio **Determine convergencia o divergencia de las series siguientes.**

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(2n)}{3n}$ $\qquad$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{5n^3+7}$

TEOREMA

Si c es una constante diferente de cero, *entonces* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n$

ambas convergen o ambas divergen

TEOREMA

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *y* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ *convergen a* L_1 *y* L_2, *respectivamente, entonces*

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ *converge a* $L_1 + L_2$

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)$ *converge a* $L_1 - L_2$

TEOREMA

$$Si \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge y } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ diverge entonces } \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) \text{ diverge}$$

CRITERIOS DE CONVERGENCIA PARA UNA SERIE

Algunos criterios de convergencia

Teorema: Prueba de la integral

Sea $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie con $a_n > 0$ y f una función continua que es no negativa y decreciente en el intervalo $[1, +\infty[$ tal que $f(n) = a_n$ para $n \geq 1$

$$i)\ Si \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ converge, entonces } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge}$$

$$ii)\ Si \int_1^{+\infty} f(x)dx \text{ diverge, entonces } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge}$$

Ejemplo

Utilizando el criterio de la integral, indique si la serie converge o diverge

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1+n^2}$

Solución

$$a_n = \frac{2}{1+n^2}$$

✓ Se cumple que $a_n = \frac{2}{1+n^2} > 0$

✓ $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$ *es continua en* $[1, +\infty[$ *y es no negativa*

Demostremos que es decreciente

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{0(1+x^2) - 2(2x)}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} < 0 \ para \ x \geq 1$$

$\therefore f$ *es decreciente*

Tenemos las condiciones para aplicar el criterio de la integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{2}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(2\tan^{-1}(x)\right)\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left[2\tan^{-1}(b) - 2\tan^{-1}(1)\right]$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}, \text{ la integral converge}$$

$$\therefore \ \textit{la serie} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1+n^2} \text{ converge}$$

En estos casos solo podemos afirmar que la serie converge o diverge, pero en el caso que converge la serie no podemos indicar a que valor converge

Necesitamos elementos más avanzados de matemática para determinar a que valor convergen estas series.

Observación
El valor al que converge la integral impropia no es igual al valor al que converge la serie.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1} = \pi\coth(\pi) - 1 \approx 2{,}1533$$

$$\int_1^{\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}5708$$

Los valores anteriores fueron calculados con el programa **wolframalpha**

Ejercicio: Determine si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k}{e^k}$ converge o diverge. Utilice el criterio de la integral.

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ se llama serie p, determine para que valores de p converge o diverge la serie p

Solución

Utilizando el criterio de la integral

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$$

$$Si\ \ p>0,\ \ a_n=\frac{1}{n^p}>0$$

$$f(x)=\frac{1}{x^p},\ \ f\ \ es\ no\ negativa\ \ y\ continua\ en\ [1,+\infty[$$

$$f'(x)=\frac{-p}{x^{p+1}}<0\quad para\ \ x\geq 1,\ \ además\ \ f\ \ es\ decreciente\ [1,+\infty[$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right)\Bigg|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}\right)-\left(\frac{1^{-p+1}}{-p+1}\right)\right]$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^{-p+1}}{-p+1}\right]+\frac{1}{1-p}$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^{-p+1}}{-p+1}\right]=0\quad si\quad -p+1<0\rightarrow p>1$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{b^{-p+1}}{-p+1}\right]=+\infty\ \ si\ -p+1>0\rightarrow 0<p<1$$

$$\therefore\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\ \ converge\ si\ \ p>1\ y\ diverge\ si\ 0<p<1$$

$$si\ \ p=1\rightarrow\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln|b|-\ln|1|\right]$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=+\infty$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\ \ diverge$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$$

$Si \ \ p \leq 0$

$$a_n = \frac{1}{n^p}$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$$

$$\therefore La\, serie \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \ diverge$$

En conclusión

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ convergen si $p > 1$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ divergen si $p \leq 1$

Ejemplo: Determine si convergen o divergen las siguientes series

a) $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^5}$

Solución

$La \ serie \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^5} \ es \ una \ serie \ p, \ con \ p = 5 > 1$

$$\therefore \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^5} \ es\, convergente$$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

Solución

$La \ serie \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \ es \ una \ serie \ p, \ con \ p = \frac{1}{3} < 1$

$$\therefore \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i^5} \ es\, divergente$$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

Solución

$$La\ serie \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ es\ una\ serie\ p,\ con\ p=1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ es\ divergente$$

A la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ **se llama serie armónica**

Ejercicio: Determine si convergen o divergen, las siguientes series

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^7} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[9]{n^7}}$$

Existen otros criterios de convergencia, entre ellos tenemos el de proporciones y el de raíz.

Teorema

Suponga que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos tal que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

$i)\ L<1,\ la\ serie\ es\ convergente.$

$ii)\ L>1\ o\ si\ L=\infty,\ la\ serie\ es\ divergente.$

$iii)\ L=1,\ el\ criterio\ no\ es\ concluyente.$

Teorema

Suponga que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos positivos tal que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$

$i)\ L<1,\ la\ serie\ es\ convergente.$

$ii)\ L>1\ o\ si\ L=\infty,\ la\ serie\ es\ divergente.$

$iii)\ L=1,\ el\ criterio\ no\ es\ concluyente.$

Ejemplo: Determine si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$ **converge o diverge**

Solución

Utilizando el criterio de la proporciones o de la razón

$$a_n = n\left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad a_{n+1} = (n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1-n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{2}{3}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1}\right) \text{ Aplicando L hopital}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} < 1 \therefore \text{ la serie } \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ es convergente}$$

Ejemplo: Determine si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{ne}{n+1}\right)^n$ converge o diverge

Solución

Utilizando el criterio de la raíz

$$a_n = \left(\frac{ne}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{ne}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{ne}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e}{1}\right) \text{ Aplicando L hopital}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = e > 1$$

$$\therefore \text{ La serie } \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{ne}{n+1}\right)^n \text{ es divergente}$$

Ejercicio: Utilizando el criterio de las proporciones o de la raíz determine si convergen o divergen las series.

$$a) \ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^{n-1}}{n3^{n-2}} \qquad b) \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{e^{n+1}}$$

SERIES ALTERNANTES

Son aquellas que tienen la forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a - a_4 + \cdots$$

TEOREMA: Para series alternantes

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ *y* $0 < a_{n+1} \le a_n$, *para todo entero positivo n, entonces la serie alternante* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n$ *converge.*

Ejemplo: Determine si la serie alternante $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right)$ converge.

Solución

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$0 < a_{n+1} \le a_n$$

$$0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}\right) \text{ converge}$$

Ejemplo: Determine si la serie alternante $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ converge.

Solución

$$a_n = \frac{n}{n^2+1}. \quad \text{Entonces} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n^2+1} = 0$$

$$0 < a_{n+1} \le a_n$$

$$0 < \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1}$$

$$(n+1)\left(n^2+1\right) < n\left((n+1)^2+1\right)$$

$$n^3+n^2+n+1 < n^3+2n^2+n+n$$

$$1 < n^2+n$$

$$\therefore 0 < \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} \text{ es verdadera}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \text{ converge}$$

Ejercicio: Determine si la series alternates siguientes convergen.

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)$ $b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n+1}{4^n}\right)$

Definición

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice que es absolutamente convergente si la serie de valores absolutos* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge*

TEOREMA

Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*

Al igual que en las series de términos positivos, también se puede aplicara los criterios de proporciones y de raíz a las series alternantes haciendo el uso del teorema anterior.

Teorema

Suponga que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ es una serie de términos distinto de cero tal que: $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$

i) $L<1$, *la serie es convergente.*

ii) $L>1$ *o si* $L=\infty$, *la serie es divergente.*

iii) $L=1$, *el criterio no es concluyente.*

Teorema

Suponga que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **es una serie de términos diferentes de cero tal que:** $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$

$i)\ L<1,\ la\ \ serie\ \ es\ convergente.$

$ii)\ L>1\ \ o\ si\ \ L=\infty, la\ \ serie\ \ es\ divergente.$

$iii)\ L=1, el\ criterio\ no\ es\ concluyente.$

Ejemplo determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{5^n}\right)$ converge

Solución

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{5^n}\ ,\ a_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{n+1}{5^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{n+1}{5^{n+1}}}{(-1)^n\frac{n}{5^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{5^{n+1}}}{\frac{n}{5^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{5^n(n+1)}{n5^{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{5^n(n+1)}{n5^n 5}\right|$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|\ \ aplicando\ L\ hopital$$

$$=\frac{1}{5}(1)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{5}<1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{5^n}\right) converge\ absolutamente\ y$$

$$por\ consiguiente\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{5^n}\right) converge$$

Ejercicio: Determine si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2^{2n}}{3^n}\right)$ converge (utilice el criterio de la raíz)

SERIES DE POTENCIAS

Son aquellas que tienen la forma

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$ a esta serie se llama serie de potencias en $x-a$ y se dice que la serie está centrada en a o tiene centro a.

Cuando $a=0$ se llama serie de potencia en x

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

En el caso que $c_n = 1 \ para \ n = 0,1,2,3,\cdots$

Obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

Observemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, en este caso tenemos la serie geométrica. Tomando $r = x$.

Esta serie converge para $|x| < 1 \ o \ -1 < x < 1$ y diverge para para $|x| \geq 1$ es decir para $x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1$

En este caso el al intervalo $-1 < x < 1$ se le llama intervalo de convergencia y $R = 1$ se llama radio de convergencia para la serie geométrica.

Para determinar el radio y el intervalo de convergencia se utiliza la prueba de proporciones .

Ejemplo caso 1: Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^3}$

Solución

Utilizamos la prueba de las proporciones, recordando que para que converja el limite debe ser menor que uno y cuando el límite da uno no es concluyente dicha prueba, en tal caso habrá que determinarlo asignadole el valor de los extremos del intervalo de convergencia para ver si dichos valores van a ir icluidos o no.

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{(x-3)^n}{n^3}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^3(x-3)^{n+1}}{(n+1)^3(x-3)^n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^3(x-3)^n(x-3)}{(n+1)^3(x-3)^n}\right|$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^3(x-3)}{(n+1)^3}\right|=|x-3|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^3}{(n+1)^3}\right|=|x-3|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{\frac{(n+1)^3}{n^3}}\right|$$

$$=|x-3|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^3}\right|=|x-3|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\right|=|x-3|(1)$$

$$=|x-3|<1\Rightarrow -1<x-3<1\Rightarrow -1+3<x<1+3\Rightarrow 2<x<4$$

↓ ↘

de centro 3 *R* = 1, *radio de convergencia*

falta verificar si los extremos estarían incluidos o no en el intervalo de convergencia.

Para ello sustituimos los valores de los extremos en la serie original

si $x=2$ *sustituimos en la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-3)^n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ *converge absolutamente, porque* $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^3}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

es una serie p con $p=3>1 \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$ *converge y podemos afirmar*

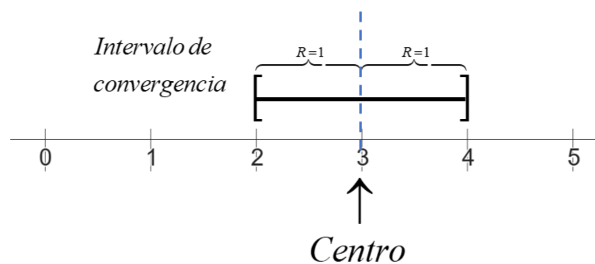
entonces que x=2 está incluido en el intervalo de convergencia.

Para $x=4$, *sustituimos en la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4-3)^n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1)^n}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$

es una serie p con $p=3>1 \therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ *converge y podemos afirmar*

entonces que $x=4$ *está incluido en el intervalo de convergencia.*

$\therefore$ El intervalo de convergencia esta dado por $[2,4]$ y de radio 1



Antes de dar otros ejemplos relacionados con las series , defininiremos lo que es el factorial de un número.

factorial de un número entero no negativo se define por :

$n!=1(2)(3)(4)\cdots(n-1)(n)$

$1!=1$

$3!=1(2)(3)=6$

$7!=1(2)(3)(4)(5)(6)(7)=5040$

El Observemos

$7!=1(2)(3)(4)(5)(6)(7)$

$6!=1(2)(3)(4)(5)(6)$

Podemos decir entonces que :

$7!=1(2)(3)(4)(5)(6)(7)$

$7!=6!(7)$

$15!=14!(15)$

$\boxed{(n+1)!=n!(n+1)}$

$1!=0!(1)$

$\boxed{1=0!}$

Ejemplo caso 2: Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!2^n (x-5)^n$$

Solución

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!2^n (x-5)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)!2^{n+1}(x-5)^{n+1}}{n!2^n(x-5)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n!(n+1)2^n 2(x-5)^n(x-5)}{n!2^n(x-5)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|(n+1)2(x-5)\right| \quad \text{este límite existe únicamente si } x-5=0 \text{, es decir si } x=5$$

$\therefore$ *La serie* $\sum_{n=0}^{\infty} n!2^n (x-5)^n$ *converge únicamente si* $x=5$, *caso contrario diverge.*

El intervalo de convergencia es el conjunto $\{5\}$

y el radio de convergencia es cero

Ejemplo caso 3: Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)^n$$

Solución

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}}{((n+1)!)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)^{n+1}}{\frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{((n+1)!)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)^n\left(\frac{x-3}{5}\right)}{\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\frac{1}{((n+1)!)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)}{\frac{1}{(n!)^2}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n!)^2}{(n!(n+1))^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)\right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n!)^2}{(n!)^2(n+1)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)\right| == \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)\right| = \left|\frac{x-3}{5}\right|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^2}\right|$$

$$= \left|\frac{x-3}{5}\right|(0) = 0 < 1$$

$\therefore$ *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2}\left(\frac{x-3}{5}\right)^n$ *converge para cualquier valor de* $x \in \mathbb{R}$

El intervalo de convergencia es $]-\infty,+\infty[$

El radio de convergencia es $R=+\infty$

En conclusión:

Para determinar el radio y el intervalo de convergencia, se utiliza la prueba de proporciones y existen tres casos:

Teorema convergencia de series de potencias

$$Para\ la\ serie\ de\ potencia \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\ solamente\ puede\ darse\ uno$$

$de\ los\ tres\ casos\ siguientes:$

$1)$ *La serie converge absolutamente para los números x en un intervalo finito* $]a-R, a+R[,\ R>0$ *y diverge para* $]-\infty, a-R[$ *o* $]a+R, +\infty[$

en el caso de los extremos habría que probar si converge la serie para dichos valores, en caso de converger, habría que incluirlos en el intervalo de convegencia.

$2)$ *La serie sólo converge en el número* $x=a$

$3)$ *La serie converge absolutamente para todos los números reales* x

Ejercicio: Determine el radio y el intervalo de convergencia de la serie

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-9)^n}{n} \qquad b) \sum_{n=0}^{\infty} n!7^n (x-3)^n \qquad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{x-4}{7}\right)^n$$

Representación de funciones mediante series de potencias

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^{n-1}$$

Donde f es una función cuyo dominio es el intervalo de convergencia

TEOREMA: Diferenciación de una serie de potencia

Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ *converge sobre un intervalo* $]a-R, a+R[$ *para el cual el radio de convergencia* R *es positivo ó* $+\infty$, *entonces* f *es diferenciable en cada* x *en* $]a-R, a+R[$, *y* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$

El radio de convergencia R *para* f' *es el mismo que el de la serie original*

TEOREMA: Integración de una serie de potencia

$$Si\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(x-a\right)^n \ converge\ sobre\ un\ intervalo\ \left]a-R,a+R\right[\ para$$

$$el\ cual\ el\ radio\ de\ convergencia\ R\ es\ positivo\ ó\ +\infty,\ entonces$$

$$\int f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}\left(x-a\right)^{n+1}+C$$

$$El\ radio\ de\ convergencia\ R\ para\ \int f(x)dx\ es\ el\ mismo\ que\ el\ de\ la\ serie\ original$$

$$Se\ tiene\ que\ la\ función\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(x-a\right)^n\ es\ continua,\ si\ su\ integral$$

$$definida\ existe\ y\ está\ definida\ por\ \int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\left(\int_a^b\left(x-a\right)dx\right)$$

$$Donde\ a\ y\ b\ son\ valores\ en\ el\ intervalo\ de\ convergencia$$

A partir, de la serie geométrica podemos general otras funciones. Recordemos que si la serie geométrica converge y converge a $\frac{a}{1-r}$

Si hacemos: $a=1\ \ y\ \ r=x$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad (1)$$

Ejemplo : Escribir $\frac{1}{1+x}$ como una serie de potencia

Solucion

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}$$

$$sustituimos\ x\ por\ -x\ en\ (1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{1-(-x)}=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots$$

$$\frac{1}{1+x}=1+(-x)+(-x)^2+(-x)^3+\cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n}$$

Ejemplo: Escribir $\dfrac{1}{1+x^2}$ como una serie de potencia

Solución

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}$$

Sustituimos x por $-x^2$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}=1+\left(-x^2\right)+\left(-x^2\right)^2+\left(-x^2\right)^3+\cdots$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots}$$

Ejemplo: Escribir $\tan^{-1}(x)$ como una serie de potencia

En el problema anterior se tiene que: $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$

Integrando ambos miembros

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx=\int\left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots\right)dx$$

$$\tan^{-1}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+C$$

$$\tan^{-1}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots+C=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2n-1}$$

Ejercicio: Determine una serie de potencias, centrada en 0, de la función indicada

$a)\ \dfrac{1}{3-x}\quad b)\ \dfrac{1}{1+2x}\quad c)\ \dfrac{1}{5+2x}\quad d)\ \dfrac{1-x}{1+2x}\quad e)\ \dfrac{7x}{x^2+x-12}\quad f)\ \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$

SERIES DE TAYLOR Y MACLAURIN

Sea f una función infinitamente diferenciable en un intervalo $]a-R,a+R[$ Puede representarse como una serie de potencia $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-a)^n$ en el intervalo $]a-R,a+R[$

Para encontrar dicha representación debe determinarse los coeficientes c_n

Para ello se deriva infinitamente y cada derivada se evalua en a

$$\begin{cases} f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+c_4(x-a)^4+\cdots \\ f'(x)= \quad c_1 \quad +2c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+4c_4(x-a)^3+\cdots \\ f''(x)= \quad +2c_2 \quad +3(2)c_3(x-a)+4(3)c_4(x-a)^2+\cdots \\ f'''(x)= \quad +3(2)c_3+4(3)(2)c_4(x-a)+\cdots \\ \vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a)=c_0+c_1(a-a)+c_2(a-a)^2+c_3(a-a)^3+c_4(a-a)^4+\cdots \\ f'(a)= \quad c_1 \quad +2c_2(a-a)+3c_3(a-a)^2+4c_4(a-a)^3+\cdots \\ f''(a)= \quad +2c_2 \quad +3(2)c_3(a-a)+4(3)c_4(a-a)^2+\cdots \\ f'''(a)= \quad +3(2)c_3+4(3)(2)c_4(a-a)+\cdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(a)=c_0 \\ f'(a)=c_1 \\ f''(a)=2c_2 \\ f'''(a)=3(2)c_3 \\ \vdots \\ f^{(n)}(a)=n(n-1)\cdots(2)(1)c_n=n!c_n \end{cases}$$

$$f^{(n)}(a) = n!c_n \to c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$f(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$ *se le llama serie de Taylor de f, centrada en a*

Cuando $a = 0$ se tiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$ *se le llama serie de Maclaurin de f.*

Ejemplo: Determine la serie de Taylor de $f(x) = \ln(x+1)$ **centrada en** $a = 2$

Solución

$$f(x) = \ln(x+1) \to f(2) = \ln(2+1) = \ln(3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \to f'(2) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \to f''(2) = -\frac{1}{(2+1)^2} = -\frac{1}{3^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} \to f'''(2) = \frac{2}{(2+1)^3} = \frac{2}{3^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(x+1)^4} \to f^{(4)}(2) = -\frac{6}{(2+1)^4} = -\frac{6}{3^4}$$

$$f^{(n)}(2) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3^n}$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3^n}}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3^n n!}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{3^n (n-1)!n}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}$$

$$\boxed{c_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}}$$

$$f(x)=\ln(3)+\frac{\frac{1}{3}}{1!}(x-2)+\frac{-\frac{1}{3^2}}{2!}(x-2)^2+\frac{\frac{2}{3^3}}{3!}(x-2)^3+\frac{-\frac{6}{3^4}}{4!}(x-2)^4+\cdots$$

$$f(x)=\ln(3)+\frac{1}{(3)1!}(x-2)-\frac{1}{(3)^2\,2!}(x-2)^2+\frac{2}{(3)^3\,3!}(x-2)^3-\frac{6}{(3)^4\,4!}(x-2)^4+\cdots$$

$$f(x)=\ln(3)+\frac{1}{(3)}(x-2)-\frac{1}{(3)^2\,2}(x-2)^2+\frac{1}{(3)^3\,3}(x-2)^3-\frac{1}{(3)^4\,4}(x-2)^4+\cdots$$

$$f(x)=\ln(3)+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}(x-2)$$

Observe como se aproxima el polinomio de Taylor a la función

https://www.geogebra.org/classic/whywyvnx

Ejemplo Determine la serie de Maclaurin de $f(x)=e^{-x^2}$

$$f(x)=e^{-x^2} \quad \to f(0)=e^{-0^2}=1$$

$$f'(x)=-2xe^{-x^2} \to f'(0)=-2(0)e^{-0^2}=0$$

$$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2} \to f''(0)=-2e^{-0^2}+4(0)^2e^{-0^2}=-2$$

$$f'''(x)=4xe^{-x^2}+8xe^{-x^2}-8x^3e^{-x^2}$$

$$f'''(x)=12xe^{-x^2}-8x^3e^{-x^2} \to f'''(0)=12(0)e^{-0^2}-8(0)^3e^{-0^2}=0$$

$$f^{(4)}(x)=12e^{-x^2}-24x^2e^{-x^2}-24x^2e^{-x^2}+16x^4e^{-x^2}$$

$$f^{(4)}(x)=12e^{-x^2}-48x^2e^{-x^2}+16x^4e^{-x^2} \to f^{(4)}(0)=12e^{-0^2}-48(0)^2e^{-0^2}+16(0)^4e^{-0^2}=12$$

$$f^{(5)}(x)=-120xe^{-x^2}+160x^3e^{-x^2}-32x^5e^{-x^2} \to f^{(5)}(0)=0$$

$$f^{(6)}(x)=-120e^{-x^2}+720x^2e^{-x^2}-480x^4e^{-x^2}+64x^6e^{-x^2} \to f^{(6)}(0)=-120$$

$$f(x)=e^{-x^2}=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{12}{4!}x^4-\frac{120}{6!}x^6+\cdots$$

No siempre la serie de Taylor converge a f. Los siguientes teoremas ayudan a identificar en que caso la serie de Taylor converge a f.

TEOREMA

Sea f una función que posee $f^{(n+1)}(x)$ para toda x en un intervalo que contiene al número a. Entonces para toda x en el intervalo.

$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

$$Donde \quad P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \; c \text{ esta entre } a \wedge x$$

$P_n(x)$: *recibe el nombre de polinomio de Taylor de f en a, de grado n – ésimo.*

$R_n(x)$: *se le llama forma de Lagrange del residuo*

TEOREMA CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE TAYLOR

Suponga que f es una función que posee derivadas de todos los ordenes en un intervalo centrado en el número a Si $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ para toda x en el intervalo, entonces la serie de Taylor generada por f converge a f.

Es decir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

Vease ejemplo 2,3 y 4 páginan 532

Cálculo trascendentes tempranas cuarta edición

Dennis G. Zill . Warren S. Wright

SERIES DE FOURIER

Definición Producto interior de funciones

El producto interior de dos funciones f_1 y f_2 en un intervalo $[a,b]$ es el número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

CONJUNTO ORTOGONAL

Un conjunto de funciones con valores reales $\{\phi_0(x), \phi_1(x),\ \phi_2(x), \dots\}$ es ortogonal en un intervalo $[a,b]$ si $(\phi_m(x), \phi_n(x)) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0 \ \ , m \neq n$

Ejemplo: Verifique que las $f(x) = sen(3x)$, $g(x) = sen(5x)$ son ortogonales en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Solución

$$(sen(3x)sen(5x)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(3x)sen(5x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x)}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(-2x) - \cos(8x)}{2} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos(2x) - \cos(8x)}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{sen(2x)}{2} - \frac{sen(8x)}{2} \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{sen\left(2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2} - \frac{sen\left(8\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{2} \right) - \left(\frac{sen(2(0))}{2} - \frac{sen(8(0))}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2}[0-0]$$

$(sen(3x), sen(5x)) = 0 \quad \therefore$ *las funciones son ortogonales en* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

El conjunto de funciones trigonométricas

$$\left\{1,\ \cos\left(\frac{\pi}{p}x\right),\ \cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right),\ \cos\left(\frac{3\pi}{p}x\right),\cdots, sen\left(\frac{\pi}{p}x\right), sen\left(\frac{2\pi}{p}x\right),\ sen\left(\frac{3\pi}{p}x\right),\ \cdots\right\} \quad (1)$$

es ortogonal en el intervalo $[-p\ ,\ p]$

Es decir, la integral de $-p$ a p de un producto de dos funciones diferentes del conjunto ortogonal (1) dará siempre cero.

Necesitamos desarrollar una función f definida en el intervalo $[-p\ ,\ p]$ en una serie ortogonal utilizando el conjunto ortogonal (1).

Podemos formar una combinación utilizando las funciones del conjunto ortogonal (1) de la forma siguiente.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\left(\frac{\pi}{p}x\right)+a_2\cos\left(\frac{2\pi}{p}x\right)+a_3\cos\left(\frac{3\pi}{p}x\right)+\cdots+b_1 sen\left(\frac{\pi}{p}x\right)+b_2 sen\left(\frac{2\pi}{p}x\right)$$

$$+b_3 sen\left(\frac{3\pi}{p}x\right)+\cdots$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$

$$\boxed{f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)+b_n sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\right)} \qquad Ec(1)$$

Lo que faltaría es determinar los $a_n\ \ para\ n=0,1,\cdots\ y\ los\ b_n\ \ para\ n=1,\ 2\ ,\ \cdots$

Multiplicando cada termino de la ec(1) por la función 1 e integrando de -p a p obtenemos

$$\int_{-p}^{p}(1)\ f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}(1)\ dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}(1)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx+b_n\int_{-p}^{p}(1)\ sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{-p}^{p}(1)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx=0\\ \displaystyle\int_{-p}^{p}(1)\ sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx=0\end{array}\right\}porque\ 1\ ,\ \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right), sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\ Pertenecen\ a\ un\ conjunto\ ortogonal$$

$$\int_{-p}^{p}(1)\ f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}(1)\ dx\rightarrow\int_{-p}^{p}f(x)dx=\frac{a_0}{2}(2p)\rightarrow\boxed{a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx}$$

Multiplicando cada termino de la ec(1) por la función $\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)$ e integrando de -p a p obtenemos:

$$\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)(1)dx+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx+b_n\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx\right)$$

$$\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)(1)dx=0\ ,\ ya\ que\ 1\ \wedge\ \cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)\ pertenecen\ a\ un\ conjunto\ ortogonal$$

$$\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx=0\quad si\quad m\neq n$$

$$\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx\neq 0\quad si\quad m=n$$

$$\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx=0$$

$$\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)f(x)dx=a_n\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

$$\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)f(x)dx=a_n p$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\left(\frac{m\pi}{p}x\right)dx}$$

$$\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx=\int_{-p}^{p}\frac{1-\cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right)}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left(1-\cos\left(\frac{2n\pi}{p}x\right)\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x-\frac{p\ sen\left(\frac{2n\pi}{p}x\right)}{2n\pi}\right]\Bigg|_{-p}^{p}=\frac{1}{2}\left[p-\frac{p\ sen\left(\frac{2n\pi}{p}p\right)}{2n\pi}\right]-\frac{1}{2}\left[-p-\frac{p\ sen\left(\frac{2n\pi}{p}(-p)\right)}{2n\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[p-\frac{p\ sen(2n\pi)}{2n\pi}\right]-\frac{1}{2}\left[-p-\frac{p\ sen(-2n\pi)}{2n\pi}\right]$$

$$=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}p$$

$$\boxed{\int_{-p}^{p}\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx=p}$$

De forma similar puede verificarse que $b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$

Definición

La serie de Fourier de una función f definida en el intervalo $]-p,p[$ está dada por:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)+b_n sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\right)$$

Donde $a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx$

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

Ejemplo: Encuentre la serie de Fourier de $f(x)=\begin{cases}-1\,, & -\pi<x<0\\ 2\,, & 0\le x<\pi\end{cases}$

Solución

$p=\pi$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}-1dx+\int_{0}^{\pi}2dx\right] \qquad \boxed{\int_a^b kdx=k(b-a)}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\left[-1\left(0-(-\pi)\right)+2(\pi-0)\right]$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}[-\pi+2\pi]=\frac{1}{\pi}[\pi]$$

$$\boxed{a_0=1}$$

$p=\pi$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-1\cos(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2\cos(nx)dx$$

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{sen(nx)}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{sen(nx)}{n}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{sen(0)}{n}\right)+\frac{1}{\pi}\left(\frac{sen(-n\pi)}{n}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{sen(n\pi)}{n}\right)-\frac{2}{\pi}\left(\frac{sen(0)}{n}\right)$$

$$\boxed{a_n=0}$$

$$p=\pi$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-1sen(nx)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}2sen(nx)\,dx$$

$$b_n=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)\Bigg|_{0}^{\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(0)}{n}\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(-n\pi)}{n}\right)-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)}{n}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(0)}{n}\right)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos(0)}{n}\right)-\frac{1}{\pi}\left(\frac{(\cos(n\pi))}{n}\right)-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(n\pi)}{n}\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(0)}{n}\right)$$

$$b_n=\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)-\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)+\frac{2}{n\pi}$$

$$b_n=\frac{3}{n\pi}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)-\frac{2}{\pi}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$b_n=\frac{3}{n\pi}-\frac{1}{\pi n}\left[(-1)^n+2(-1)^n\right]$$

$$b_n=\frac{3}{n\pi}-\frac{3(-1)^n}{\pi n}$$

$$\boxed{b_n=\frac{3-3(-1)^n}{\pi n}}$$

Sustituyendo a_0 , a_n , b_n *en* $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)+b_n sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)\right)$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-3(-1)^n}{\pi n}sen(n\pi x)}$$

Ejercicio: Encuentre la serie de Fourier de $f(x)=\begin{cases}0\,, & -\pi<x<0\\ x^2\,, & 0\le x<\pi\end{cases}$

$$R//\ f(x)=\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos(nx)+\left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}+\frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n-1\right]sen(nx)\right)\right\}$$

Teorema: condiciones de convergencia

Sean f y f' funciones continuas por tramos en el intervalo $]-p,p[$; esto es, f y f' continuas excepto en un número finito de puntos en el intervalo y con discontinuidades finitas solo en estos puntos. Entonces, la serie de Fourier de f en el intervalo converge a f en un punto de continuidad. En un punto de discontinuidad, la serie de Fourier converge al promedio $\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

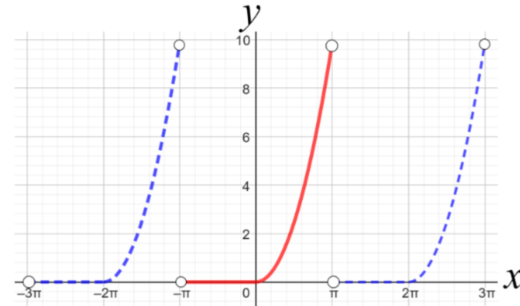
Donde $f(x^+)$ y $f(x^-)$ son los límites por la derecha en x y el l´mite por izquierda en x respectivamente

Utilizando $x=0 \wedge x=\pi$ con la serie del ejercico anterior verifique que:

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$

Y

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$



PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES PARES E IMPARES

a) El producto de dos funciones pares es par
b) El producto de dos funciones impares es par
c) El producto de una función impar con una par es impar
d) La suma (resta) de dos funciones pares es par
e) La suma (resta) de dos funciones impares es impar
f) Si f es par , entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
g) Si f es impar , entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Definición series de Fourier de senos y cosenos

i) La serie de Fourier de una función par en el intervalo $]-p,p[$ *es la serie de cosenos*

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$

Donde:

$$a_0=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx$$

$$a_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

ii) La serie de Fourier de una función impar en el intervalo $]-p,p[$ *es la serie de senos*

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)$$

Donde:

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

Ejemplo: Determinar la serie de Fourier de $f(x)=\pi^2-x^2 \;,\; -\pi<x<\pi$

Solución

$f \;\; es \;\; par$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2-x^2\right)dx$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\pi^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\pi^2\pi-\frac{\pi^3}{3}\right)-0$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi^3}{3}\right)$$

$$\boxed{a_0=\frac{4\pi^2}{3}}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2-x^2\right)\cos(nx)\,dx$$

π^2-x^2 (+)	$\cos(nx)$
$-2x$ (−)	$\frac{sen(nx)}{n}$
-2 (+)	$-\frac{\cos(nx)}{n^2}$
0	$-\frac{sen(nx)}{n^3}$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\left(\pi^2-x^2\right)sen(nx)}{n}-\frac{2x\cos(nx)}{n^2}+\frac{2sen(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{\left(\pi^2-\pi^2\right)sen(n\pi)}{n}-\frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2}+\frac{2sen(n\pi)}{n^3}\right]-\left[\frac{\left(\pi^2-0^2\right)sen(n(0))}{n}-\frac{2(0)\cos(n(0))}{n^2}+\frac{2sen(n(0))}{n^3}\right]\right\}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\right]$$

$$a_n=-\frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$a_n=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$f(x)=\frac{4\pi^2}{3(2)}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nx)$$

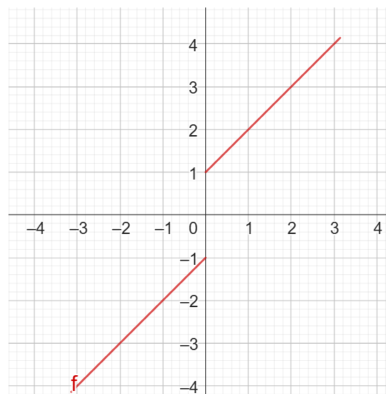
$$\boxed{f(x)=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos(nx)}$$

Ejemplo

Desarrolle la función $f(x)=\begin{cases}x-1 \;,\; -\pi<x<0\\ x+1 \;,\; 0<x<\pi\end{cases}$ en una serie apropiada de cosenos y senos

Solución

Graficamente puede observarse que es una función impar



$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)sen\left(\frac{n\pi}{\pi}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (x+1)sen(nx)dx$$

$x+1$	$sen(nx)$
1	$-\frac{\cos(nx)}{n}$
0	$-\frac{sen(nx)}{n^2}$

(+, −)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(x+1)\cos(nx)}{n}+\frac{sen(nx)}{n^2}\right]_0^\pi$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi+1)\cos(n\pi)}{n}+\frac{sen(n\pi)}{n^2}\right]-\frac{2}{\pi}\left[-\frac{(0+1)\cos((0)n)}{n}+\frac{sen(0)}{n^2}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(\pi+1)(-1)^n}{n}\right]-\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n}\left[-(\pi+1)(-1)^n+1\right]$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi n}\left[-(\pi+1)(-1)^{n}+1\right]sen(n\pi)$$

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{\pi n}\left[(\pi+1)(-1)^{n+1}+1\right]sen(n\pi)}$$

Ejercicios:

1) *Desarrolle la función* $f(x)=x\ ,\ -\pi<x<\pi$ *en una serie apropiada de cosenos o senos*

2) *Desarrolle la función* $f(x)=\begin{cases}1\ , & -2<x<-1\\ 0\ , & -1<x<1\\ 1\ , & 1<x<2\end{cases}$ *en una serie apropiada de cosenos o* senos.